

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رضائی
بهار ۱۴۰۳



استقلال خطی، بعد و مرتبه، فضای ضرب داخلی

تمرین تئوری دوم

تاریخ انتشار: ۶ فروردین ۱۴۰۳

۱. پرسش‌های خود در مورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. سیاست ارسال با تاخیر: شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمرین تئوری و عملی به صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمرین: دانشجویان می‌توانند در حل تمرین برای رفع ابهام و یا به دست آوردن ایده‌ی کلی با یکدیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماماً توسط خود دانشجو انجام شود. حتما در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.

پرسش ۱ (۲۵ نمره) درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید. اگر فکر می‌کنید گزاره‌ای درست است، آن را اثبات کنید و در غیر این صورت برای آن مثال نقض بیاورید.

(آ) فرض کنید بردارهای u_1, u_2, \dots, u_n مستقل خطی‌اند. n جایگشت متمایز از اعداد ۱ تا n را در نظر می‌گیریم و آن‌ها را $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ می‌نامیم. ماتریس‌های A و B را به صورت زیر در نظر گرفته و ماتریس C را به صورت $C = AB$ تعریف می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} \text{---} & \sigma_1^T & \text{---} \\ \text{---} & \sigma_2^T & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \sigma_n^T & \text{---} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \text{---} & u_1^T & \text{---} \\ \text{---} & u_2^T & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & u_n^T & \text{---} \end{bmatrix}$$

سطرهای ماتریس C مستقل خطی هستند.

(ب) فرض کنید $W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$ یک فضای برداری روی F باشد. w_1, w_2, \dots, w_{n+1} بردارهایی متمایز در W هستند که W را اسپین می‌کنند. اگر $\vec{0} = w_1 + w_2 + \dots + w_{n+1}$ ، آن‌گاه بردارهای w_1, w_2, \dots, w_n مستقل خطی هستند.

پرسش ۲ (۲۵ نمره) فرض کنید $V = P_n(\mathbb{R})$ فضای برداری چندجمله‌ای‌های دارای ضرایب حقیقی با حداکثر درجه n باشد. اگر $q(x)$ یک چندجمله‌ای عضو V با درجه n باشد، اثبات کنید مجموعه $S = \{q(x), q'(x), q''(x), \dots, q^{(n)}(x)\}$ یک پایه برای V است.

پرسش ۳ (۳۰ نمره) ماتریس $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ یک ماتریس متقارن است اگر داشته باشیم:

$$\forall 1 \leq i < j \leq n; A_{ij} = A_{ji}$$

زیر فضایی از $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ که شامل تمامی ماتریس‌های متقارن می‌باشد را با $M_{n \times n}^{sym}(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم. یک پایه برای $M_{n \times n}^{sym}(\mathbb{R})$ بیابید و بعد آن را مشخص کنید.

پرسش ۴ (۲۰ نمره) اثبات یا نقض کنید:

- (الف) تابعی که به عنوان ورودی $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ را می‌گیرد و خروجی آن $|x_1 y_1| + |x_2 y_2|$ است یک ضرب داخلی در \mathbb{R}^2 است.
- (ب) تابعی که به عنوان ورودی $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3))$ را می‌گیرد و خروجی آن $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ است یک ضرب داخلی در \mathbb{R}^3 است.
- (ج) تابعی که به عنوان ورودی $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ را می‌گیرد و خروجی آن $x_1 y_1 + x_2 y_2$ است یک ضرب داخلی در \mathbb{R}^2 است.
- (د) برای $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ تعریف می‌کنیم $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$ ثابت کنید که این تعریف یک تابع ضرب داخلی است.